Le jeu difficile entre rigueur et sens

Giuseppe Longo

Le jeu difficile entre rigueur et sens[1]

Giuseppe Longo

Centre Cavaillès, République des Savoirs,
CNRS et Ecole Normale Supérieure, Paris
School of Medicine, Tufts University, Boston
http://www.di.ens.fr/users/longo/

Résumé La rigueur est dans le numérique, nous dit Pythagore, dans les règles de l'arithmétique, des algorithmes ; le numérique constitue le sens du monde car il lui est intrinsèque. Ensuite, on retrouvera le sens dans le geste qui trace la ligne sans épaisseur, un bord qui découpe les figures du monde - abstraction, symbole, action rigoureuse, construction de diagrammes qui évoquent un sens organisateur du réel. Le débat reprend aujourd'hui entre, d'une part, le cerveau et le biologique, aplatis sur la rigueur exacte de l'alpha-numérique, les codages modernes, et, de l'autre, leur sens dans un corps, organisme actif dans un écosystème, jeu de contraintes qui produisent une hétérogenèse du sens.

1 - Les harmonies brisées du nombre

Suites harmoniques de nombres entiers, correspondances parfaites entre musique et formes des rangements des nombres – rectangulaires, triangulaires … pentagonaux …., moyennes harmoniques à l'appui, un univers parfait permet la connaissance et la production du beau. Sens et rigueur vont de pair à l'époque où la Grèce invente, en même temps, la philosophie, la monnaie et les mathématiques (Herrenschimdt, 2007). Les catégories de la philosophie rendent le monde intelligible ; la monnaie donne à toute chose une valeur, en tant qu'équivalent général, elle catégorise tout objet, toute activité ; les entiers et leurs rapports mathématiques sont la mesure de toute chose, exactement, ils en sont l'essence.

Et puis … la catastrophe : le logos parfait du nombre entier produit l'a-logos, l'irrationnel, au cœur même de la perfection du carré unitaire : sa diagonale produit un nombre, $\sqrt{2}$, démontrablement en dehors de la raison arithmétique, des rapports entre nombres entiers. La légende nous raconte la mort, fort méritée, de l'impie qui avait montré ce paradoxe à l'intérieur même des automatismes du calcul numérique, de la doxa pythagoricienne des mesures exactes et complètes du monde, contre la rigueur du nombre entier et de ses rapports, des harmonies célestes et musicales (Chiurazzi, 2018).

Quel est le sens de cet insensé ? Comme toujours face aux grands résultats négatifs, la raison s'élargit, elle va inclure le geste qui trace, produit la ligne, ré-introduit du sens, en évoque par des diagrammes (Panza, 2012). Les symétries, des jugements spatiaux sans nombres, fondent la géométrie, car les axiomes d'Euclide maximisent les symétries des constructions entendues, par des gestes, des tracés sur le plan, riches de sens (Longo, 2011). Les symétries sont “derrière” les axiomes : leur structure de sens géométrique précède l'écriture des axiomes et en est davantage stabilisée[2]. Cette nouvelle théorie générale de la mesure des surfaces bornées trouve son sens

1 Dans *La rigueur,* T. Paul et al. (eds), Spartacus IDH, 2020.

2 "L'évidence primaire ne doit pas être échangée avec l'évidence des "axiomes" ; puisque les axiomes sont déjà le résultat d'une formation originaire de sens (Sinnbildung) et ils ont déjà cette formation elle-même

mathématique, et sa rigueur, dans ce qui deviendra la définition bêta de la géométrie euclidienne : le ligne est sans épaisseur. Voilà la notion mathématique de bord, conceptuellement profonde, qui permet de mesurer des surfaces sans approximation, exactement, grâce à une nouvelle rigueur du voir. ‘‘Théorème’’ a la même racine que théâtre : à la logique s’ajoutent, chez Euclide, symétries, rotations et translations, des gestes dans la preuve.

La géométrie donc s’invente dans un jeu difficile entre trace imaginée et produite et langage : seulement par le geste du premier maître, dans l’espace, sur le sable, on peut comprendre ce que c’est qu’une ligne continue, une trajectoire, un bord ; seulement dans le langage on peut dire : « cette ligne que je trace est sans épaisseur », elle est juste le bord d’une figure, une trajectoire indépendante de l’objet qui la parcourt. Elle est un invariant de la pensée, car constitué par plusieurs actes d’expérience : les gestes, les traces sur une surface, et les mots. L’écriture fige définitivement cette nouvelle forme de l’imaginaire mathématique. Et c’est seulement en arrivant à concevoir, avec rigueur, la notion mathématique de bord, que l’on peut observer que le calcul de π ne termine jamais : les suites des polygones inscrits et circonscrits n’atteignent jamais le bord sans épaisseur d’un cercle, une limite asymptotique.

La méthode axiomatique et la déduction logique sont bien nécessaires à la rigueur de la preuve chez Euclide, mais le sens réside tout d’abord dans cette invention de la toute première et fondamentale structure mathématique : la ligne sans épaisseur. Le point et ses propriétés en suivent : il est, en premier lieu, un ‘‘semeion’’, un signe, en fait une lettre - Démocrite avait déjà noté les atomes, des indivisibles, par des lettres de l’alphabet. Ces signes se trouvent aux extrêmes d’un segment (définition gamma), à l’intersection de deux lignes sans épaisseur (théorème 1, livre I). Donc le point n’a pas de parts, explicitera-t-on six siècles plus tard (définition alpha).

Dans la preuve du théorème I.1, ces lignes sans épaisseur, en tant que gestes, trajectoires, bords, sont des tracés continus, sans saut ni lacunes, dans lesquels se perdrait la flèche de Zénon ; elles produisent donc un point et un seul lors de leur intersection - une évidence pour toute pensée qui trace, comme chez Euclide. Du même coup, cette intersection non vide définit la continuité de telles lignes : une ligne sans épaisseur est continue quand elle produit toujours un point et un seul, lors de l’intersection en de bonnes conditions d’une autre ligne sans épaisseur. Le rêve formaliste d’une transparence parfaite de la preuve, de pouvoir distiller toute notion utilisée, toute définition implicite, au moins a posteriori, se heurte contre la richesse des mathématiques, toujours enracinée dans une pratique historique du sens, toujours évocatrice de sens pour celui qui écoute ou lit – sans cela elles seraient incompréhensibles. Le prix à payer pour cette participation au sens est la ‘‘rigueur informelle’’, le jeu inévitable des ambiguïtés qui évoquent, qui côtoient toujours le partage d’une construction rigoureuse mais sensée.

En conclusion, quelle amputation du savoir que de nous avoir raconté, pendant un siècle, qu’Euclide était l’ ‘‘inventeur de la méthode axiomatique’’, un prédécesseur d’Hilbert aux preuves souvent peu rigoureuses, mal formalisées[3]. Et que d’avoir ainsi oublié, par idéologie formaliste, l’invention d’un sens mathématique nouveau, celui des structures fondatrices de la pensée mathématique occidentale : la ligne sans épaisseur tracée par des gestes signifiants à l’intention de tout autre humain, les symétries qui participent de la preuve. Ces structures résultent du regard qui organise le réel, le découpe en imposant des bords, le rend mathématiquement signifiant par la recherche des invariants des rotations et des translations du plan, les symétries fondamentales de la construction géométrique.

---

toujours derrière eux" [Husserl, L’origine de la géométrie, 1933]

3 Voir la critique des prétendues incomplétudes formelles dans la preuve du théorème I.1 ainsi que les notes et commentaires dans l’incontournable traduction des livres d’Euclide par (Heath, 1908) : Euclide, comme ‘‘hilbertien’’, n’était pas très bon. Or, une preuve est toujours et aussi une construction *historique* de sens.

2 - Les mathématiques sont abstraites, symboliques, rigoureuses … au-delà des axiomes, derrière les axiomes

> « It is sometimes said that the axiomatization problem is to generate the set of valid statements. But this is a logician's parody of the role in mathematics of genuine axiomatic theories » (Kreisel, 1971)

2.1- Abstraites

Les mathématiques sont abstraites, nul n'en doute. Il est toutefois impossible de définir de façon parfaitement nette et adéquate ce que veut dire ‘‘abstrait’’ en mathématique, car cela reviendra à saisir, très probablement, la notion générale d'abstraction, une tâche impossible. Limitons nous a souligner certains parcours constitutifs de l'abstraction mathématique, en nous focalisant sur le rôle de la construction d'invariants.

Les mathématiques s'enracinent sur des gestes constitutifs de ses objets et structures, des gestes qui précèdent la preuve, partagés par tous les humains, car communs aussi à certains animaux.

Le ‘‘petits comptage’’ (Dehane, 1997), c'est à dire la saisi d'un petit nombre d'objets, permet à nombreux animaux d'isoler des invariants *pratiques :* distinguer six bananes de huit, indépendamment de leurs organisation spatiale ; comparer six rugissements entendus à distance avec les quatre lions vus dans son propre groupe et … prendre la fuite face au groupe plus nombreux. Sans langage, l'invariant numérique est pratiqué et vécu, il n'est pas constitué, il ne produit pas un concept, le concept de nombre.

Pour Brouwer, fondateur de la logique intuitionniste, l'expérience de la «two-one-ness of time » est au cœur de ce parcours constitutif : un instant qui suit un autre, la scansion discrète du temps. Cela paraît confirmé empiriquement par des interactions entre la numérotation et les jugements temporels (Xuan et al., 2007). Toutefois, pour produire un invariant conceptuel, il faut développer différentes ‘‘pratiques’’ : le comptage dans le temps, certainement, des sons par exemple, mais aussi dans l'espace, des objets, en comparer la numérosité, comme plus haut chez maints animaux, peut permettre la constitution de ce qui est indépendant de chacune de ces expériences actives, qui est propre à toutes. Dans le langage, nous produisons le concept de nombre, un invariant par rapport aux transformations d'une expérience à une autre, d'une notation à une autre (qui peut même se stabiliser dans des traces cérébrales, *conséquences* d'une pratique, (Jacob, Nieder, 2009)). En continuant sans s'arrêter, dans l'espace, ces gestes constitutifs de l'ordre, on fixe une direction, un bon ordre, une ligne numérique que toute personne ‘‘numérisée’’ *voit* : on pense les nombres sur une ligne imaginée (Zebian, 2005). Bien évidemment, ces gestes qui organisent le monde précèdent, et de loin, toute axiomatique : ils la ‘‘fondent’’.

De même, les saccades qui précèdent et anticipent l'agression d'une proie par un prédateur pour en permettre la saisie, la fuite de la proie, tracent une trajectoire, même si c'est la très difficile ‘‘courbe de poursuite’’ (Berthoz, 1997). Comme le joueur de tennis qui précède la balle qui arrive, par les yeux, leurs saccades, par le mouvement de tout son corps. A cet égard, Teissier (2005) propose la notion d' ‘‘isomorphisme’’ de Poincaré-Berthoz. Il s'agit d'une transformation ‘‘isomorphe’’ qui corrèle/identifie les saccades oculaires, la ligne visuelle (qui comprend la direction détectée et anticipée par le cortex primaire) et la "ligne vestibulaire" (la stabilité inertielle du corps, guidée par le système vestibulaire et qui contribue à la mémorisation et à la poursuite du mouvement inertiel) ; cet isomorphisme constitue un invariant par rapport à différentes expériences actives.

La trajectoire-ligne imaginée, puis tracée et décrite dans les mots, saisit donc cet invariant pratique, cognitif ; le langage, la pratique du dessin, l'associe à l'invention des bords, comme ceux tracés par nos ancêtres dans les caves de Lascaux, les bords d'un bison, d'un cheval, une ligne, comme plus tard dans les peintures en Égypte, en Crète. Voilà une analyse possible du parcours constitutif de cette fondamentale abstraction mathématique grecque : la ligne sans épaisseur, une idée hors du monde, un geste asymptotique à la limite du monde, mais profondément enraciné dans le monde, dans nos pratiques qui lui donnent un sens, qui permettent des découpages organisateurs du monde par cette idée fondatrice, paradigme de la rigueur maximale des mathématiques. Sa position axiomatique, la définition explicite n'en sont que l'aboutissement. Dans la preuve, l'évocation du sens qui précède l'axiomatique sera une composante essentielle du raisonnement, comme dans le Théorème I.1 d'Euclide, mais on y reviendra.

Bien évidemment, ces gestes primaires, ces actions dans l'espace et le temps, ne sont que des *conditions de possibilités* pour que l'on arrive à l'abstraction mathématique ; on les partage avec maints animaux et donc, a fortiori, potentiellement avec tous les humains – voilà l'universalité relative, potentielle des mathématiques. Celle-ci résultera, deviendra actuelle dans notre culture, grâce aussi aux croisements de traditions diverses, grecques, arabes, chrétiennes – comme l'infini en acte du Dieu des chrétiens (Zellini, 2005). Histoires variées, chacune stabilisant différents invariants conceptuels, spatiaux, algébriques, asymptotiques … comme le montre la variété des symboles et des formes, picturales et mathématiques, de l'infini (Longo, Longo, 2020).

2.2 - Symboliques

Les mathématiques sont symboliques. Le symbole, "sym-bolon" (sym-ballein), réuni, regroupe, unifie différentes formes du sens. Il est un geste évocateur, par le signe *signifiant*, une synthèse de différentes références de sens, comme les logogrammes que nous utilisons pour les nombres. Ces derniers évoquent, "réunissent", le comptage, le passage du temps, disions nous, le geste itéré dans l'espace.

Les symboles mathématiques proposent, par l'écriture ou le dessin, l'invariant au cœur de l'abstraction. Le même, pour, par exemple, les différentes expériences actives du nombre mentionnées plus haut. Le symbole n'est pas un signe formel, une marque sans sens sur le papier, manipulable par une machine suivant une règle purement syntactique. Son rôle dans la conceptualisation, dans la preuve, requiert une référence au sens, à l'ordre, aux symétries, même dans la preuve (Longo, 2011a). Son écriture, sa trace diagrammatique, tout comme le dessin d'une ligne, sont rendus possible par la faculté principale de la mémoire animale : l'*oubli* sélectif, actif. Dans l'action, on retient ce qui compte pour une action future – car la mémoire animale est là pour rendre possible l'action future, voila son rôle évolutif. Peu importent les détails du contexte pour la capture d'une proie, on doit seulement se souvenir des caractéristiques de sa trajectoire, des invariants qui comptent. Ensuite, on évoquera dans la mémoire ce qui nous sert pour la nouvelle action. Notre mémoire sélective lors de l'action et, à nouveau, lors de son itération dans un contexte différent, permet la constitution de l'invariant. Son explicitation dans le symbole, le signe, le dessin abstraits, suivra. L'invariance produite par l'intersubjectivité, dans le langage et dans le geste partagé, en est au cœur.

Le symbole est la voie fondamentale de l'abstraction mathématique et, une fois ainsi posé, il acquiert une autonomie. Par exemple, la première forme symbolique de l'infini actuel, le point projectif de la peinture italienne (Panofsky, 1927) a une origine théologique dans les Annonciation du XIV siècle (Damish, 1987 ; Arasse, 1999 ; Longo S., 2013). Il devint, à partir du XV siècle (Piero della Francesca, Alberti ...), une technique pour l'organisation de l'espace en peinture (Simon, 2001 ; De Risi, 2012 ; Longo, Longo, 2020). Au XIX siècle, quand Cantor osa poser ω, symbole de l'infini, il pu le manipuler algébriquement et construire les suites $\omega+1$, $\omega+2$ … $\omega+\omega$, ... ω^2, ω^3,… ω^ω … en lui donnant ainsi un sens arithmétique nouveau par des opérations sur le symbole même. Rien ne stabilise mieux un signe, dans son rôle de symbole mathématique, que son usage dans une pratique (symbolique). Avec Gentzen (1935), il acquit un rôle dans la preuve. L'axiomatique ne fera que suivre ce mouvement de stabilisation scripturale et d'action sur un concept-symbole.

2.3 - Rigoureuses

Les mathématiques sont rigoureuses. La vraie rigueur mathématique ne peut être qu'évocatrice du sens, par ce biais elle ne peut être que ''informelle'', disions-nous. Un formalisme sans sens, dont l'efficacité est seulement basé sur une manipulation de signes, indépendamment du sens, tombe facilement, rigoureusement, dans l'absurde. Dès que Frege, qui avait pensé une Logique enracinée sur le sens (les règles pour l'implication et la quantification), essaya de formaliser la Théorie cantorienne des ensembles, on en dériva facilement une contradiction, sorte de blague à raconter chez son barbier, surtout s'il ne rase que les incapables de se raser tout seuls – une blague dont raffolent les philosophes logicistes, voire le seul paradoxe dont ils parlent. La solution fût immédiate : deux types, classes et ensembles. Plus profondément, Frege avait oublié que les mathématiques sont ''typées'' - ça fait partie de leur construction de sens : on déclare où, sur quel ensemble et univers, une fonction est définie, à valeurs dans quel ensemble. On spécifie donc les univers de définition des fonctions et des ensembles. Et 30 ans plus tard, en 1932, quand Church pensa un calcul de fonctions qui s'appliquent à elles-mêmes, en tant que pur formalisme calculatoire, sans types et sans sens, voila le paradoxe de Curry, une écriture plus technique d'une circularité contradictoire. Pour contourner la contradiction, il faudra ré-insérer les types, (Church, 1941), une forme de déclaration du sens, ou limiter le jeu simultané de l'auto-application et de la négation (Barendregt, 1984), se souvenir de leur sens. Cela donnera un système de calcul très expressif et intéressant, grâce aussi à l' ''opérateur paradoxal'' de Curry, dont on trouvera un nouveau sens dans des espaces topologiques originaux, voir (Amadio, Curien, 1998; Longo, 2004) pour des synthèses. Et encore : dès que Martin-Löf (1971) inventa un univers formel de Types, lui-même un Type, voila le paradoxe de Girard (Coquand, 1986), invention complexe qui explicite une bogue profonde ainsi que l'expressivité de ce formalisme et de ses variantes aux interprétations riches d'applications surprenantes (Arndt, 2011), une fois ''réparé'' par la référence au sens (Martin-Löf, 1984).

En conclusion, chaque fois qu'on a cru pouvoir s'émanciper du sens en proposant la rigueur parfaite d'un formalisme pur, sensé fonder les mathématiques, on a engendré des blagues mathématiques, voire des contradictions techniquement intéressantes, qui ont montré l'insensé dans le jeu des formalismes, explicité leurs limites et ouvert la voie à des excellentes mathématiques. Après avoir retrouvé la cohérence et du sens, ces dernières serviront surtout à encadrer les langages de programmation, les calculs des ordinateurs, voire à proposer des nouvelles structures mathématiques. On ne trouve pas, au XXème siècle, autant de naufrages logiques dans les mathématiques inventées et pratiquées dans le sens, bien en amont de toute axiomatisation formelle prétendument parfaitement rigoureuse et complète. L'insensé, l'absurde guette tout formalisme pur, tout calcul machinal : l'évocation du sens participe toujours de la construction mathématique rigoureuse. Celle-ci, a posteriori, doit expliciter avec rigueur les hypothèses de travail, les définitions, les notions, les outils conceptuels, bref, si nécessaire, le cadre axiomatique, mais sensé, de la praxis mathématique.

2.4 - L'écrasement

La monomanie du XXème siècle dans les fondements des mathématique, le ''tournant linguistique'' (tout est un formalisme linguistique) nous a fait croire que l'on pouvait identifier ces trois concepts, difficiles et différents, de ''abstrait, symbolique, rigoureux'' avec ''formel''. Ce qui justifie la provocation de R. Thom : « Tout ce qui est rigoureux est insignifiant ». Des axiomes parfaitement formalisés, suites bien formées de signes, gérées par des règles de remplacement de signes par des signes (la déduction formelle), auraient dû saisir complètement la pratique abstraite, symbolique et rigoureuse des mathématiques, en dehors du sens, du contexte et de l'histoire. On esquissera les conséquences de cet écrasement de la richesse du sens sur le non-sens du formel dans d'autres disciplines, comme les analyses de la cognition et du vivant, conséquences qui touchent, aujourd'hui et fortement, notre humanité et notre écosystème. L'enseignement philosophique des limites gödeliennes, à comprendre à l'interface des disciplines (Longo, 2018), et, plus encore, les preuves récentes d'indémontrabilité formelle de théorèmes intéressants de la théorie des nombres (Longo, 2011a) ont été ignorées. Les mathématiques nous montrent, en fait, que toute preuve importante, même d'un énoncé parfaitement formalisable, est une construction dynamique de sens, requiert des nouvelles structures, voire l'explicitation de leurs propriétés, du premier théorème d'Euclide à la preuve de Wiles du théorème de Fermat ; elle est l'invention de nouveaux parcours de pensé riches d'histoire et de nouveaux concepts signifiants et originaux. Il en est ainsi, des lignes euclidiennes, traces continues sans épaisseur, riches d'un sens ancré sur des gestes anciens et sur les Idées d'une métaphysique typiquement grecque, jusqu'aux représentations galoisiennes des courbes modulaires semi-stables et leurs propriétés originales qui surgissent lors de la preuve (Wiles, 1995).

3 - Le sens dans le diagramme, un exemple

Prenons en exemple une petite expérience mathématique personnelle. La notion de gödelization est une invention purement syntactique, le point de départ du codage de la métathéorie dans la théorie qui permettra à Gödel d'encoder *en* Arithmétique les énoncés *sur* l'Arithmétique, dont « cet énoncé n'est pas un théorème » - un énoncé en fait indémontrable en Arithmétique. La théorie de la calculabilité démarre alors grâce à un encodage, par des nombres, de toutes les fonction calculables, qui servent à Gödel pour encoder les preuves (en "gödelisant" tous les algorithmes qui les décrivent dans n'importe quel langage formel). La puissance de cette idée relativement simple est énorme : non seulement elle permet d'encoder tout système formel (hilbertien) en Arithmétique, mais aussi d'agir sur les fonctions calculable, par des "fonctionnels" disons, en travaillant sur leurs codes. Par ce jeu purement formel, Gödel casse de l'intérieur le projet formaliste : il engendre formellement un énoncé formellement indémontrable. Or, si ces fonctionnels (des fonctions sur des fonctions) sont calculables, on peut itérer l'idée et calculer sur les fonctionnels. Toutefois … codages, codages, codages … à chaque étape on perd du sens. Fort utile toutefois : les ordinateurs empilent des programmes qui agissent sur (prennent comme argument) des programmes codés par des suites de nombres, qui agissent sur des programmes …. Par des systèmes de Types, on met alors les nombres entiers au type 0, les programmes au type 1, puis les programmes qui agissent sur des programmes au type 2 … et ainsi de suite. La description mathématique ne diffère pas de la gestion mécanique : chaque type agit sur les codes du type inférieur … codages, codages, codages …. Très bien pour la machine digitale qui encode le monde, très mauvais pour les hommes qui pensent : on n'y voit rien et on n'y comprend rien.

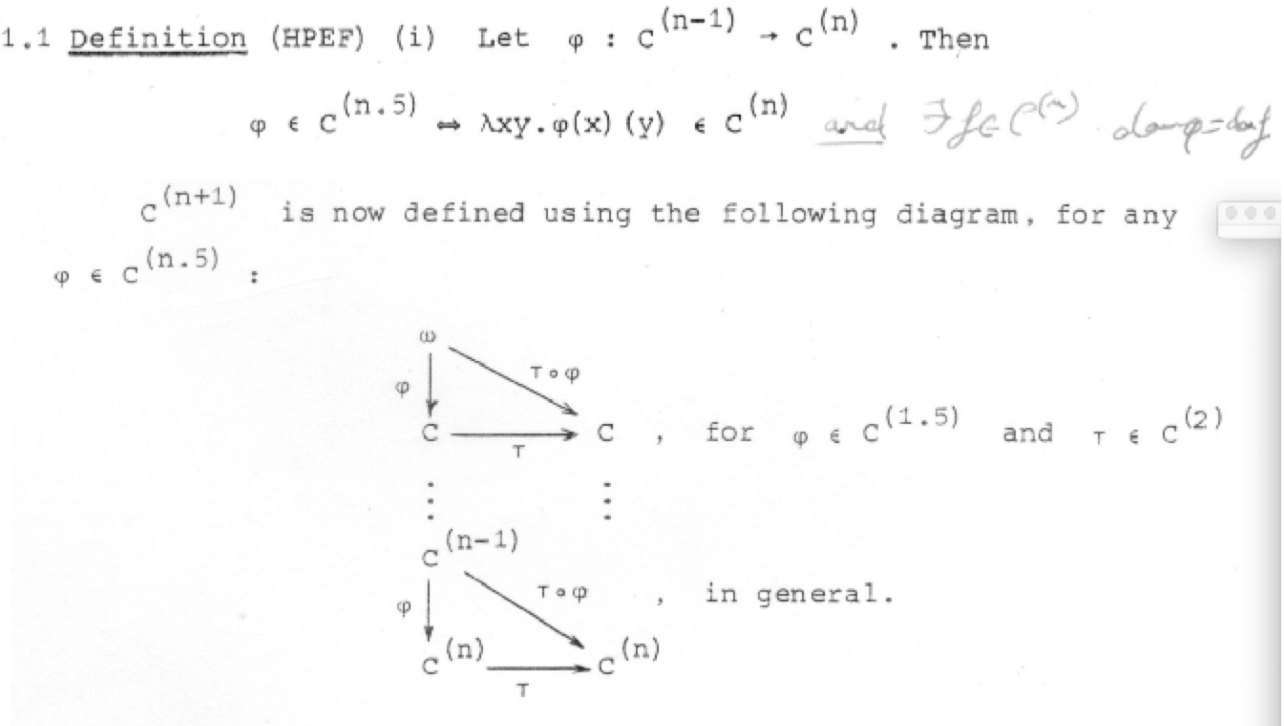
Pour récupérer du sens, en 1980, j'ai eu une petite idée diagrammatique pour décrire, *montrer* mathématiquement cette hiérarchie de fonctions et fonctionnelles calculables. Présentée à Oxford en février de cette même année, j'avais trouvé l'incompréhension courtoise mais radicale de Robin Gandy, ancien élève de Turing pour lequel tout *processus physique fini* dans le monde serait une fonction calculable, en passant par suffisamment de codages. Découragé par les critiques d'un si illustre formaliste, j'ai repris mon idée seulement en octobre 1982, lors d'une visite au département de mathématiques de l'ETH de Zürich. Fort heureusement, Georg Kreisel, très illustre visiteur de ce même lieu, eu la gentillesse de m'écouter, tout en gardant la hauteur de son autorité. Il me demanda immédiatement un texte écrit pour mieux en discuter : huit pages qui furent tapées à la machine (pas de word processing à l'époque) en une journée par un secrétariat d'une efficience parfaite.

Les Hereditary Partial Effective Functionals (HPEF) permettent de "monter" dans les types par un simple jeu de diagrammes. A l'époque, je ne connaissait pas du tout la théorie des catégories, mais on entrevoit une approche catégorielle, implicite, dans les HPEF. On se donne le type 0, $C^{(0)}$, les entiers, et le type des fonctions calculables, $C^{(1)}$. Le type intermédiaire $C^{(1.5)}$ est défini par une propriété fondamentale du discret calculable : dans la catégorie des fonctions calculables, $C^{(0)}xC^{(0)}$ est isomorphe, via <-, -> disons, à $C^{(0)}$, et toute fonction de deux arguments est calculable si et seulement si elle est calculable en chacun de ses arguments. Cela permet de définir ce nouveau type $C^{(1.5)}$ des fonctions de $C^{(0)}$ à $C^{(1)}$:

> une fonction φ est dans $C^{(1.5)}$, si la fonction qui transforme $<x,y> \in C^{(0)}$ en $\varphi(x)(y) \in C^{(0)}$ est en $C^{(1)}$ (les fonctions φ dans $C^{(1.5)}$ doivent aussi avoir un domaine récursivement énumérable, bref dom φ = dom f, pour un $f \in C^{(1)}$).

Et on continue de la même façon pour définir $C^{(n.5)}$ pour tout n (voir 1.1 Définition (HPEF) (i) dans la figure plus bas). Un diagramme commutatif définit alors facilement $\tau \in C^{(n+1)}$, les fonctions de $C^{(n)}$ à $C^{(n)}$:

> $\tau \in C^{(n+1)}$ si $\tau \circ \varphi \in C^{(n.5)}$, pour tout $\varphi \in C^{(n.5)}$, comme dans la figure, tapée à Zürich :


1.1 Definition (HPEF) (i) Let $\varphi : C^{(n-1)} \to C^{(n)}$. Then

$$\varphi \in C^{(n.5)} \Leftrightarrow \lambda xy.\varphi(x)(y) \in C^{(n)}$$ and $\exists f \in C^{(n)}$ dom φ = dom f

$C^{(n+1)}$ is now defined using the following diagram, for any $\varphi \in C^{(n.5)}$:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tau\circ\varphi"] & \\ C \arrow[r, "\tau"'] & C \end{tikzcd}$$, for $\varphi \in C^{(1.5)}$ and $\tau \in C^{(2)}$

$$\begin{tikzcd} C^{(n-1)} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tau\circ\varphi"] & \\ C^{(n)} \arrow[r, "\tau"'] & C^{(n)} \end{tikzcd}$$, in general.

Le questionnement de Kreisel fut immédiat et argumenté : intéressant, peut-être, mais trop simple pour marcher ; comment corréler cela à la hiérarchie des fonctionnelles de Kleene-Kreisel ? aux neuf axiomes de l'approche de Kleene etc. ? Toutes des constructions très compliquées et syntactiques (formules et codages, codages et formules…). La discussion continua jusqu'en 1984 par courrier, sur papier bien évidemment[4].

En fait, dans plusieurs articles avec S. Martini et E. Moggi, en thèse sous ma direction à l'époque, nous avons répondu à ces questions et corrélé cette structure diagrammatique aux grands systèmes de Types (et sans Type). La preuve démontrant que "ça marche" (que la hiérarchie est bien définie dans les types et qu'elle se corrèle bien aux approches connus) n'est point évidente : en particulier, il faut immerger la hiérarchie discrète des fonctions calculables dans les types dans une structure continue – bref, la preuve est "analytique" (voir les articles linked dans le lien en note).

4 Pour les quatre lettres de Kreisel et des liens aux réponses et aux articles pertinents, voir : https://www.di.ens.fr/users/longo/files/FourLettersKreisel.pdf (téléchageable aussi de : https://www.di.ens.fr/users/longo)

Au delà de l'intérêt, à l'époque, de quelques spécialistes de ce secteur très spécifique de la Logique Mathématique (Higher Type Recursion), il nous a fait plaisir de voir que l'approche à ouvert des pistes pour un encadrement plus conséquent. Dans (Cockett, Hofstra, 2008) on présente "a convenient setting for the categorical study of abstract notions of computability" … "Longo and Moggi, in [30,29], made significant contributions to this programme. While their main motivation seems to have been … the study of computability at higher types (as opposed to elementary recursion theory), they formulated the appropriate categorical concepts corresponding to Gödel numberings and parametrization." A une époque de ''impact factor'' à deux ans, on ne peut que se réjouir d'un article qui intéresse encore, vingt-quatre ans après sa publication.

Par un ''voir'' diagrammatique, relativement rigoureux, mais point formel, on faisait de la Théorie des Catégories sans le savoir.

4 - Le discret, la rigueur, la certitude

4.1 - Classique

Le continu permet de concevoir les fluctuations, les interférences, la ''sécrète noirceur du lait''. Ajoutées à la non-linéarité de la description mathématique d'un processus, on obtient l'imprédictibilité des processus dynamiques classiques. Fluctuations, perturbations en dessous de la meilleure mesure possible, un intervalle, et non-linéarité produisent donc l'incertitude, l'aléatoire classique.

Par contre, le discret numérique, classique, permet l'accès exact, ses points sont isolés par définition : même la plus sauvage des dynamiques non-linéaires itère à l'identique, en parfaite certitude, dans un espace discret, comme celui des pixel et des bits de n'importe lequel de nos ordinateurs. Mais, si elle est la discrétisation d'une dynamique non-linéaire, elle ne pourra pas la suivre que très peu de temps (si le temps en est le paramètre). Exactitude et rigueur, voilà la force de nos machines à états discrets, si l'on entend par rigueur l'itération obsessionnelle et exacte de tout algorithme, c'est-à-dire la ''correction des programmes'', l'ambition de toute bonne pratique et théorie de la programmation. Du reste, que peut faire un système axiomatique à la Hilbert, "potentiellement mécanisable" disait-il, sinon itérer une preuve toujours à l'identique, une fois lancée et relancée dans un processus déductif à partir des axiomes ? Et tout algorithme est une preuve, dans un système axiomatique adéquat (l'isomorphisme de Curry-Howard (Girard et al, 1989)). Le discret des axiomes, suite finie de signes maniés par des suites finies de signes (les règles d'inférence), permet la rigueur parfaite de la méthode axiomatique formelle, le rêve de pouvoir tout calculer et, donc, tout déduire, voire connaître (la complétude des théories axiomatiques : le ''*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*'' de Hilbert). Mais le discret et le fini fétichisent l'itération et ils en restent prisonniers (Châtelet, 1993) : leur incomplétude, gödelienne et physique, nous libère.

4.2 - Quantique

Le caractère discret du rayonnement du corps noir, découvert par Max Planck en 1900, est en fait un caractère discret de l'espace de phase quantique - cet espace mathématique de haute dimension où chaque degré de liberté spatial, dans un système à plusieurs particules, produit un degré de liberté correspondant. Mais le discret quantique est aussi engendré par le continu de l'équation de Schrödinger, tout comme le continu classique des équations aux dérivées partielles engendre des spectres discrets grâce aux conditions aux bords (Paul, 2007) .

A l'échelle de l'espace-temps de Planck, quelque chose de radicalement nouveau apparaît alors : l'image lisse de l'espace-temps que nous adoptons dans la physique classique est abandonnée et quelque chose de tout à fait différent émerge à ce niveau. On est obligé d'envisager des fluctuations quantiques sauvages qui se produiraient à l'échelle de Planck, nous donnant ainsi l'image d'un fouillis de fluctuations topologiques. La prétendue rigueur du calcul et de l'itération exactes, le rêve du discrétiseur classique, disparaît : l'évolution de l'équation de Schrödinger ne nous fournit pas de résultat de mesure unique, mais une superposition de résultats possibles, avec une valeur de probabilité attribuée à chacun. En fait, la situation quantique est en un sens "pire" qu'avec les systèmes non-linéaires classiques, car ici le manque de prédictibilité ne résulte pas des limitations de la discrétisation dans les simulations informatiques, que l'on peut rêver d'améliorer indéfiniment : même une simulation absolument précise de la solution de l'équation de Schrödinger ne nous permettrait pas de prédire quel sera le résultat physique. La rigueur des mathématiques autour de l'équation de Schrödinger n'a rien à voir avec le mythe de l'exactitude du calcul classique dans le discret, conséquence pratique de la déduction formelle hilbertienne.

4.3 - Biologique

Ah, le bruit, que ça gène ! En physique, on fait une mesure, classique, quantique, et la théorie nous dit ce qu'est l'aléatoire : un double pendule classique, imprédictibilité non-linéaire ; le spin d'un électron, imprédictibilité quantique. Bref, on sait préciser la nature de l'aléatoire et les mathématiques départagent les deux : les inégalités de Bell font la différence en probabilité entre aléatoire classique et quantique. Puis, lors de la mesure, un camion passe dans la rue ; voila du bruit qui affecte la mesure. La différence est importante et permet de cerner les problèmes, encadre la construction et la mise en place des instruments, les buts mêmes de la mesure.

Loin de cette finesse, les pères fondateurs de la biologie moléculaire nous expliquent au contraire que « l'évolution est due à du bruit », car la cellule est un « mécanisme cartésien », une « algèbre booléenne … comme dans les ordinateurs » (Monod, 1970). Et voila à nouveau le mythe de l'exactitude numérique discrète au niveau de la protéase, de l'expression génétique, mécanismes exacts, dans le discret alphabétique de l'écriture des instructions génétiques – règles de déduction hilbertiennes. En fait, dans un ordinateur digital il n'y a pas d'aléatoire ou tout est fait pour le cacher - un grand défi dans les réseaux d'ordinateurs : il faut rendre cet aléatoire un « do not care » (Longo et al., 2010), car il ne peut y avoir ou on ne peut y voir que du bruit dans l'élaboration de l'information (quelle nuisance, dans les très rares cas où cela se produit !).

C'est ainsi que l'information se propage de façon linéaire de l'ADN à l'ARN, puis aux protéines (sauf des petites boucles exactes ADN/ARN), récite le Dogme Central de la Biologie Moléculaire (Crick, 1956). Même le repliement des protéines, au cœur de leur fonctions, serait programmé par l'ADN. A partir des protéines donc, la diversité et la variabilité biologiques seraient due à du bruit, une grave distorsion conceptuelle (Bravi, Longo, 2015). Il n'y aurait donc pas à faire d'analyse d'un aléatoire propre au biologique, comme cela a été fait en physique (classique/quantique), voire elle serait même interdite, comme les citations des hétérodoxes, pendant des décennies. Parmi ces hétérodoxies fortement combattues, on peut énumérer : le contrôle épigénétique de l'expression génétique, dont les travaux de B. McClintock (McClintock, 1953) ; le repliement des protéines dus à des interactions entre molécules, comme chez les prions, (Prusiner, 1977) : les deux seraient impossibles car contre le Dogme Central. Et enfin, l'expression stochastique des gènes, dont l'article (Kupiec, 1983) fût un pionnier, longtemps considéré insensée. Ces idées commenceront a être appréciées bien après (Fox-Keller, 2003 ; Cassuto 1999 ; Elowitz et al., 2002). Encore aujourd'hui, la rigueur de la discipline se confond avec l'exactitude d'un prétendu discret des dynamiques qui gouvernent le vivant. Les généticiens orthodoxes se présentent alors comme les gestionnaires rigoureux de la nature et, par exemple, prétendent piloter exactement les plantes dans l'écosystème - les OGM, enfants directs du Dogme Central de la Biologie Moléculaire. Le "éditing" de l'ADN, programme génétique, permettrait de maîtriser les interactions avec, par exemple, le microbiome des racines, au cœur de la viabilité des plantes et de leur écosystème ; ses modifications indirectes, au contraire, ont des effets catastrophiques sur l'humus et la biodiversité (Kowalchuk, 2003; Bizzarri 2012). La prétendue rigueur du géno-centrisme moléculaire, analyse exacte, molécule par molécule, des spécificités des interactions macromoléculaires, est encore une fois présenté sous couvert d'un discret alpha-mumérique, héritage ultime de ce tournant linguistique au cœur d'un siècle de débat sur les fondements des mathématiques.

Or, il n'y a pas de bruit en biologie, mais de l'aléatoire dont la fonction est la production de variabilité, diversité et adaptabilité, fortement canalisé par le contexte et l'histoire (West-Eberhard, 2003). Tout au plus, il peut y avoir un bruit (expérimental, typiquement) à bien départager de l'aléatoire fonctionnel, ce dernier au cœur de l'onto-phylo-genèse. Or, en biologie, lors des expériences, le défi est constitué par le double caractère de la mesure, synchronique et diachronique, et donc du bruit qui peut se présenter par rapport aux deux. C'est-à-dire, la connaissance du présent d'un organisme, d'un organe, doit aussi faire référence au passé, à sa mesure (l' ''homologie'' comme origine commune d'organes différents, par exemple) : l'accès au passé, l'origine évolutive, font partie de l'analyse scientifique (Montévil, 2019). On essaye de traiter cet aléatoire radical, proprement biologique, comme une dynamique de « l'espace des phases », l'espace changeant des phénotypes et des organismes possibles : cet aléatoire est donc dû non seulement aux limites de la mesure, mais au changement même des observables à mesurer (Longo, 2017 ; Montévil, 2020). On essaye aussi de le mathématiser comme ''hétérogenèse'' (Sarti et al, 2019), au delà de toute morphogenèse physico-mathématique encore encrée sur des parcours optimaux dans des espaces des phases pre-donnés (Longo, 2020).

5 – Aplatir le cerveau et l'organisme sur des suites finies de signes *vs.* leur donner du sens

Trop longtemps, l'Intelligence Artificielle (forte) nous a raconté que le cerveau est une Machine de Turing (MdT), voire que celle-ci le *modélise* complètement. Mais alors, quoi de plus rigoureux d'une MdT, bien plus que n'importe quel cerveau ? Droite-gauche, écrit-efface, 0-1. Le cerveau, en fait, ne serait qu'une pâle approximation de cette intelligence, suite au flou de ses neurones trop mous. Cette thèse a été affaiblie chez les modérés, les teneurs de l'IA classique ''normale'' : on peut (bon, on pourra … bientôt, disait-on) *imiter* complètement un cerveau humain par une MdT. Cette distinction entre ''modèle'' et ''imitation'' thématise ce qui est implicite dans deux articles fondamentaux de Turing : celui sur le jeu de *l'imitation* (1950) et l'autre sur un *modèle* de la morphogenèse (1952). Turing était très loin de l'arrogance ordinaire des intelligents artificiels qui ont suivi, comme je résume dans une longue lettre personnelle à Turing lui-même (Longo, 2018t).

Ces deux formes de IA ont essentiellement disparu. Après de longues années, une autre filière, trop longtemps mise à l'écart, a pu émerger. L'idée était, dès son origine (Rosenblatt, 1958), de *modéliser* le cerveau, en tant que réseau de neurones, par une mathématique des réseaux de points aux connections variables. Un tournant a eu lieu quand on a observé que, au bout du compte, le cerveau est en trois dimensions. Depuis les travaux de LeCun et de bien d'autres (Boser et al., 1991), on a empilé des couches de réseaux (bi-dimensionnels) dans une troisième dimension, donc en leur donnant une profondeur (Deep Learning). Par des méthodes enfin non banales de filtrage (linéaire) et convolution (non-linéaire), on arrive à implémenter des algorithmes très efficaces pour la reconnaissance d'images et de la voix. Bien évidement, il s'agit d'une novelle imitation, car le cerveau n'est pas un empilement de couches de réseaux électriques plats et indépendants. Toutefois, il s'agît une imitation bien plus efficace que celle inspirée par les MdT, bien qu'elle soit encore basée sur une vision du cerveau ''machine input-output'', isolé comme dans un pot de confiture, sans corps ni sens, parfaitement incapable de reconnaître une caricature (Longo, 2019).

Quand on s'adresse à la biologie, on éprouve de la tendresse pour la naïveté des pionniers de l'IA classique, forte et faible, leur enthousiasme et leur innocence – leur disparition. Par contre, en biologie, l'hégémonie du Dogme Centrale de la Biologie Moléculaire persiste, bien qu'on s'en défende : les OGM prolifèrent, la recherche sur le cancer reste geno-centrée (Weinberg, 2014;

Longo, 2018c). On y entrevoie les immenses intérêts industriels, médicaux et pharmaceutiques, des producteurs des pesticides ou des prétendues "magic bullets" génétiques pour tout soigner, distorsion politique de la connaissance scientifique (Lazebnik, 2018).

Encore un fois, on a projeté sur le monde la rigueur parfaite des mécanismes cartésiens, des algèbres booléennes, de nos machines numériques, exactes. Et la perte de sens est radicale[5].

Face à la débâcle scientifique et culturelle de cette vision du monde, un dernier avatar de la rigueur machinale recourt à un renoncement explicite de tout sens : sur la base de Big Data, on pourra prédire et agir même sans comprendre - « Correlation supersedes causation, and science can advance even without coherent models, unified theories » (Anderson, 2008). Un nouveau pythagorisme propose des nouveaux mythes : une science du nombre sans connaissance, une pragmatique sans sens, explicitement agnostique. Il considère les données numériques comme intrinsèques à tout objet, à tout processus naturel et social, parfaitement objectives. Or, les nombres, entiers ou pas, ne sont pas "déjà là", dans le monde. Associer un nombre à n'importe quel processus physique est une tâche d'une immense difficulté : il s'agit de l'acte de la *mesure* physique, classique/quantique, un vrai défi. Il est encore plus difficile en biologie, car la spécificité et l'historicité de chaque organisme demande une nouvelle théorie de la mesure expérimentale, disions-nous, dont on peut trouver une remarquable esquisse dans (Montévil, 2019).

Bref, toute mesure, toute association donc d'un nombre à un objet de science, présuppose une explicitation théorique : le choix des observables pertinents et de l'instrument de mesure. Ce dernier est un objet souvent très complexe, toujours construit sur la base d'un fort engagement théorique – même un mètre est défini aujourd'hui comme une longueur parcourue dans un certain temps (calculé par des oscillations microphysiques) par la lumière, dont la vitesse est un invariant fondamental de la Théorie de la Relativité. Il est absurde d'identifier le monde à des nombres et, a fortiori, considérer comme "objectif" un ensemble de nombres, sans expliciter comment on les a produits, extraits du monde, par la force de quelle théorie, quel choix des observables, quelle procédure de mesure.

Fort heureusement, les mathématiques démontrent que, dans des immenses quantités de nombres, on trouve nécessairement des corrélations fallacieuses (Calude, Longo, 2017). Il est donc impossible de se fier à une régularité, voire à des corrélations découvertes par la machine sur un ensemble de données : il y en a, nécessairement, qui ne dépendent que de la cardinalité de l'ensemble, et, donc, que l'on trouve même si l'ensemble est produit par du hasard – des lancements de dés, des mesure quantiques[6].

Pour sortir de ce nouvel aplatissement du monde sur le numérique, rappelons que, si, d'une part, le cerveau, son activité, n'a pas de sens en dehors d'un corps, organisme dans un écosystème, de l'autre cet organisme se comprend en tant que jeu de "contraintes" (Montévil, Mossio, 2015) dans et avec un écosystème résultant d'une histoire, (Soto, Longo, 2016 ; Longo, 2017 ; Montévil, 2020).

C'est donc par l'explicitation d'un parcours constitutif du sens, par l'explicitation théorique dans une histoire, que l'on atteint l'objectivité relative, voire "relativisante", de la connaissance scientifique. La rigueur en fait partie, une conquête difficile, impossible à rendre absolument solide

5 Wolfram et ses acolytes nous expliquent que l'Univers est un grand ordinateur numérique et les lois de la nature des algorithmes, donc qu'un corps tombe car il est programmé pour tomber, que les nombres sont intrinsèques au monde, indépendamment de toute mesure physique/biologique, que « what cannot be computed cannot be thought » (Ladyman, Ross, 2008). Une nouvelle ontologie, nous disent-ils explicitement. L'ontologie des GAFAM.

6 Dans (Calude, Longo, 2017) on utilise la Théorie de Ramsey pour montrer ce fait. Or, cette théorie permet d'engendrer des nombres énormes, hors portés de tout réseau d'ordinateurs concevable (des fonctions calculables dont on ne peut pas démontrer la convergence en Arithmétique, (Longo, 2011a)). Nous utilisons cependant des résultats de cette théorie qui restent dans les limites du calculable exponentiel : le logarithme de peta de petabytes donne des régularités d'une longueur aussi remarquable qu'insensée dans *toutes* ces immenses bases de données.

par l’empilement de suites de signes formels, ou même par une reconstruction à posteriori de ces suites. La rigueur toutefois est une conquête aussi solide que la plus stable de nos formes de connaissance, nos mathématiques, ancrées sur les grands invariants théologiques, grecs et chrétiens, sur lesquels sont bâtis les espaces infinis et pre-donnés de la physique (Longo, Longo, 2020). Nous nous posons maintenant le problème, (Longo, 2020), de la pertinence de ces invariants mathémati-ques de l’infini et de l’espace dans les sciences historiques, comme la biologie et l’économie, par la recherche de nouveaux cadres de rigueur et de sens, voir http://cardano.visions-des-sciences.eu/fr .

References (Pour les articles dont Longo est (co-)auteur voir : https://www.di.ens.fr/users/longo/download.html)

Amadio R., Curien P.-L. (1998) *Domains and lambda-calculi,* Birkhuaser.

Anderson C. (2008) The End of Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Method Obsolete. *Wired Magazine*.

Arasse D. (1999) *L'Annonciation Italienne. Une Histoire de Perspective*. Paris: Hazan.

Arndt P., Kapulkin K. (2011) Homotopy-Theoretic Models of Type Theory. In: Ong L. (eds) *Typed Lambda Calculi and Applications*. TLCA 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol 6690. Springer, Berlin, Heidelberg

Barendregt, H. (1984) *The Lambda-Calculus: its Syntax, its Semantics*. Amsterdam: North-Holland.

Berthoz A. (1997). Le Sens du Mouvement. Paris: Odile Jacob.

Bizzarri M.(2012) *The New Alchemist. The Risks of Genetic Modification.* WIT Press, Boston.

Boser B. , E. Sackinger, J. Bromley, Y. LeCun, and L. Jackel (1991) An analog neural network processor with programmable topology. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 26(12):2017-25.

Bravi B., Longo G. (2015) The Unconventionality of Nature: Biology, from Noise to Functional Randomness. *Unconventional Computation and Natural Computation*, Springer LNCS 9252, Calude, Dinneen (Eds.), pp 3-34.

Calude C., Longo G. (2016) Classical, Quantum and Biological Randomness as Relative Unpredictability. Special issue of *Natural Computing*, vol. 15, 2, 263–278, Springer, June.

Calude C., Longo G. (2017) The deluge of Spurious Correlations in Big Data. In *Foundations of Science* Vol. 22, Issue 3, pp 595–612.

Cassuto J. (1999) *De la maladie de la vache folle à celle de Creutzfeld-Jakob*, Odile Jacob.

Châtelet G. (1993) *Les enjeux du mobile*, Seuil, Paris.

Chiurazzi G. (2018) *Dynamis. Ontologia dell’incommensurabile*. Guerini, Milano.

Church A. (1941) *The Calculi of Lambda-Conversion*. Series: Annals of Mathematics Studies, Volume 6, Princeton: Princeton University Press.

Cockett J., Hofstra P. (2008) Introduction to Turing categories, *Annals of Pure and AppliedLogic* 12; 156(2-3):183-209.

Coquand T. (1986) An analysis of Girard's paradox. *Logic in Computer Science.* IEEE Computer Society *Press.* pp. 227–236.

Crick F. (1956) On Protein Synthesis. *Symp. Soc. Exp. Biol.* XII, 139-163.

Damisch H. (1987) *L’Origine de la perspective.* Flamarion, Paris.

Dehaene S (1997) *La Bosse des Maths*. Editions Odile Jacob, Paris.

Dehaene S, Bossini S, Giraux P (1993) The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122:371-396.

De Risi V. (2012) Arte e scienza della sfera. La nascita del concetto moderno di spazio fra la teoria rinascimentale della prospettiva e la geometria di Leibniz. In : *Sphaera : Forma immagine e metafora, tra Medioevo ed Età Moderna*, Olschki, Roma.

Elowitz, M. B.,Levine, A.J., Siggia, E., Swain, P.S. (2002) Stochastic Gene Expression in a Single Cell. *Science*, 297.

Enriques F (1935), Philosophie scientifique et empirisme logique. In: *Actes du Congrès international de philosophie scientifique*, Hermann, Paris.

Fox Keller E. (2003) *A Feeling for the Organism Life and Work of Barbara McClintock,* Freeman, New York.

Girard J.Y., Lafont Y., Taylor R. (1989) *Proofs and Types,* Cambridge University Press.

Heath T.L (1908) *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Cambridge Univ. Press.

Herrenschmit C. (2007) *Les Trois Écritures, Langue, nombre, code*. Paris: Gallimard

Kreisel G. (1971) Some Reasons for Generalizing Recursion Theory. In : *Logic Colloquium 1969* (Gandy, Yates eds), Elsevier.

Kowalchuk G.A. et al., (2003) Assessing responses of soil microorganisms to GM plants. *Trends in Ecology and Evolution* 18, 403–410.

Kupiec J.-J. (1983) A probabilistic theory for cell differentiation, embryonic mortality and DNA C-value paradox. *Specul Sci Technol* 6, 471-478.

Jacob S N, Nieder A (2009) Notation-Independent Representation of Fractions in the Human Parietal Cortex. *The Journal of Neuroscience*, 29(14):4652-4657.

Ladyman J., Ross D. (2008) *Every Thing Must Go, Metaphysics Naturalized*, Oxford U.P..

Lazebnik Y. (2018) Who is Dr. Frankenstein? Or, what Professor Hayek and his friends have done to science. *Organisms, Journal of Biological Sciences,* vol. 2, n. 2.

Longo G. (2004) Some Topologies for Computations. In *Géométrie au XX siècle*, 1930 - 2000, Hermann, Paris.

Longo G. (2011) Theorems as Constructive Visions. *Proceedings of ICMI 19 conference on Proof and Proving***,** Taipei, Taiwan, May 10 - 15, 2009, (Hanna, de Villiers eds.) Springer.

Longo G. (2011a) Reflections on Concrete Incompleteness. *Philosophia Mathematica,* 19(3): 255-280.

Longo G. (2017) How Future Depends on Past Histories and Rare Events in Systems of Life*, Foundations of Science***,** 1-32.

Longo G. (2018) Interfaces of Incompleteness. In Minati, G, Abram, M & Pessa, E (Eds.) *Systemics of Incompleteness and Quasi-systems,* Springer, New York, NY.

Longo G. (2018c) Information and Causality: Mathematical Reflections on Cancer Biology. In *Organisms. Journal of Biological Sciences*, vol 2, n.1.

Longo G. (2018t) Letter to Alan Turing. In *Theory, Culture and Society*, Special Issue on Transversal Posthumanities. Füller, Braidotti (eds).

Longo G. (2019) Des hommes et des machines : comment reconnaitre une caricature ? Actes du Colloque "*Le travail au XXIème siècle : Droit, techniques, écoumène*", Collège de France, Paris, 26-27 février 2019.

Longo G. (2020) Naturalizing Physics. Or, embedding physics in the historicity and materiality of the living. *Deleuziana*, n. 11, special issue on “Differential Heterogenesis: Deleuze, Mathematics And The Creation Of Forms”.

Longo G., Longo S. (2020) Infini de Dieu et espace des hommes en peinture, conditions de possibilité pour la révolution scientifique. A paraître dans *Arts et Sciences* (Maurel et al., eds), Iste-Willey.

Longo G., Palamidessi C., Paul T. (2010) Some bridging results and challenges in classical, quantum and computational randomness. In *Randomness through Computation*, H. Zenil (ed), pp. 73–92, World Scientific.

Longo S. (2013) La perspective de l'Annonciation, présentation d'une étude de Daniel Arasse *et* L‘intervalle sacré. In *Studiolo*, revue de l'Académie de France à Rome, n. 10, p. 24-32 et p. 75-93.

Martin-Löf P. (1984) *Intuitionistic Type theory,* Napoli: Bibliopolis.

McClintock B. (1953). Induction of Instability at Selected Loci in Maize. *Genetics*. **38** (6): 579–599.

Monod J. (1970) *L'hasard et la nécessité*, Seuil, Paris.

Montévil, M. (2019) Measurement in biology is methodized by theory. *Biology & Philosophy*. June, 34:35

Montévil, M. (2020) Historicity at the hearth of biology. *Theory in Biosciences*, to appear.

Montévil M., Mossio M. (2015) Closure of constraints in biological organisation. *Journal of Theoretical Biology*, vol. 372: 179-191.

Panofsky E. (1927) *Die Perspecktive als symbolische Form.* Leipzig&Berlin (English: *Perspective as Symbolic Form.* New York: Zone Books, 1991).

Panza M. (2012) The Twofold Role of Diagrams in Euclid’s Plane Geometry”, in Janiak, Schliesser (éd.), *Interpreting Newton: Critical Essays,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp, 55-102.

Paul T. (2007) Discret-continuous and classical-quantum. *Math. Struct. in Computer Science*, 17, p. 177-183.

Poincaré H. (1905/1997) *La Valeur de la Science*. Champs Flammarion, Paris.

Poincaré H. (1908) L’invention mathématique. *Bulletin de l’Institut Général Psychologique*. 3:175-187, re-imprimé dans : Essai sur la psychologie de l’invention dans le domaine mathématique (par Hadamard J), éd. J. Gabay, 1993.

Prusiner S.B., Hadlow H.R., Eklund C M, Race R E (1977) Sedimentation properties of the scrapie agent, *PNAS*, 74(10): 4656–4660.

Rosenblatt, F (1958) The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain, Cornell Aeronautical Laboratory, *Psychological Review*, v65, No. 6, pp. 386–408

Sarti,A., Citti G., Piotrowski, D (2019) Differential heterogenesis and the emergence of semiotic function. *Semiotica*. Vol 2019, Issue 230

Simon G. (2001) Optique et perspective : Ptolémée, Alhazen, Alberti. *Revue d'histoire des sciences*, 54, n°3, pp. 325-350.

Soto A., Longo G. (guest eds.) (2016) *From the century of the genome to the century of the organism: New theoretical approaches*, a Special issue of *Progress in Biophysics and Mol. Biology*, Vol. 122, 1, Elsevier.

Teissier B. (2005) Protomathematics, perception and the Meaning of Mathematical Objects, in P. Grialou, G. Longo et M. Okada (Dir.), *Images and Reasoning*, Keio University Press, Tokyo: p. 135-146.

Turing, A. (1950) Computing machinery and intelligence. *Mind*, 50: 433–460.

Turing, A. (1952) The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. R. Soc. London B* 237: 37–72.

Xuan B, Zhang D, He S, Chen X (2007) Larger stimuli are judged to last longer. *Journal of Vision*, 7(10):1-5

Zebian S (2005) Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC Effect and the REVERSE SNARC Effect in English and Arabic Monoliterates, Biliterates, and Illiterate Arabic Speakers. *Journal of Cognition & Culture*. 5(1-2):165-190.

Zellini, P. (2005). *A Brief History of Infinity*, NewYork: Peguin Book.

Weinberg R. (2014) Coming Full Circle - from endless complexity to simplicity and back again. *Cell* 157*,* March 27.

West-Eberhard M-J. (2003) *Developmental Plasticity and evolution.* Oxford U. Press, New York.

Wiles A. (1995). "Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem". *Annals of Mathematics.* **141** (3): 443–551.